Задание № 23 Повторные производные функции

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

Повторные производные функции

Определение: *Второй производной* функции  называется производная от ее производной: .

Определение: *Третьей производной* функции  называется производная от ее второй производной: .

*Замечание:* аналогично можно определить четвертую, пятую и т. д. производные. Производные порядка выше третьего обозначают, как правило, не штрихами, а либо латинскими цифрами, либо арабскими цифрами в скобках, например, шестая производная:  или .

*Пример 1:* . Найти третью производную .







*Пример2*: Найти вторую производную параметрически заданной функции .

По определению вторая производная есть производная от производной (первой производной). Первая производная была найдена выше: . .

Вторая производная равна: .

*Пример 3*: Найти вторую производную неявной функции 

Найдем сначала первую производную: ; . Тогда . Избавимся теперь от  в выражении для второй производной: .

*Пример 4*: Найти общую формулу для производных любого порядка функций , , , , 

А) 

,  , 



Б) 

, , , , 



В) 

, , 



В частности, 

Г) 

, 





Д) 

, 





**Раскрытие неопределенностей**

**Теорема (Правило Бернулли-Лопиталя)**

1) Если функции  и определены на промежутке , имеют на этом промежутке конечные производные, 

и  для некоторой точки , то



2) Если функции  и определены на промежутке , имеют на этом промежутке конечные производные, ,  для некоторой точки  и , то



*Замечание*: доказанная теорема позволяет избавляться от неопределенности вида  под знаком предела.

***Пример*:** Вычислить предел 

При подстановке  под знак предела, получим неопределенность вида .

Применим правило Бернулли-Лопиталя: . Подставляя  под знак предела, снова получим неопределенность вида . Снова применим правило Бернулли-Лопиталя: .

Рассмотрим неопределенности других видов:

1) : , тогда .

Дробь  представляет собой неопределенность вида , значит при вычислении пределов, под знаком которых находится неопределенность вида , можно применять тот же метод, что и в предыдущем примере.

***Пример*:**  .

2) : Пусть , а , тогда  или ,

т.е. в первом случае получаем неопределенность вида , во втором - .

***Пример:*** 



3) , , : Рассмотрим предел  и пусть , а .

Рассмотрим вспомогательный предел . Под знаком последнего предела находится уже знакомая неопределенность вида . Предположим, что , тогда, очевидно, что .

***Пример 1 (второй замечательный предел):*** 

Рассматриваем предел . Под знаком этого предела – неопределенность вида , значит можно применять правило Бернулли-Лопиталя: .

Значит, как и следовало ожидать, .

Можно привести иную форму второго замечательного предела:



Замена  в выражении  приводит к уже известной форме второго замечательного предела .

***Пример 2:*** 

Рассматриваем предел . Значит, .

4)  ()

Рассмотрим вспомогательный предел , под знаком которого находится неопределенность вида . Если , то .

***Пример 3:*** 

Рассматриваем предел . Значит, .

**Самостоятельная работа:**

1. Найти вторые производные функций: а) ; б) ; в) ;
2. Найти вторые производные функций: а) ; б) ; в) ;
3. Найти вторые производные функций: а) ; б) ;
4. Найти производные сотого порядка функций: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ; з) ; и) ;
5. Пользуясь правилом Бернулли-Лопиталя, вычислить пределы:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ;

1. **.** Вычислить пределы, сводя их к выражениям, допускающим применение правила Бернулли-Лопиталя

а)  ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ; з) ; и) ;